

Planche n° 29. Dimensions des espaces vectoriels : corrigé

Exercice n° 1

e_4 et e_5 ne sont pas colinéaires. Donc (e_4, e_5) est une famille libre et $\dim G = \text{rg}(e_4, e_5) = 2$.
Ensuite, puisque e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, on a $2 \leq \dim F \leq 3$. Soit alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = 0 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & ((3) - (2)) \\ \nu - \lambda = 0 & ((1) - (2)) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

On a montré que : $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$.

La famille (e_1, e_2, e_3) est donc libre et $\dim F = \text{rg}(e_1, e_2, e_3) = 3$.

Comme $F \subset F + G$, $\dim(F + G) \geq 3$ ou encore $\dim(F + G) = 3$ ou 4 . De plus :

$$\dim(F + G) = 3 \Leftrightarrow F = F + G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

On cherche alors (λ, μ, ν) élément de \mathbb{R}^3 tel que $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ ce qui équivaut au système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = -1 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = -1 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 2 & (4) \end{cases}.$$

$(3) - (2)$ fournit $\lambda = -1$ puis $(1) - (2)$ fournit $\nu = -2$ puis (2) fournit $\mu = 4$.

Avec ces valeurs, (4) n'est pas vérifiée car $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$. Le système proposé n'admet pas de solution ou encore $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$. Par suite, $\dim(F + G) = 4$.

Enfin,

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Exercice n° 2

On a $H_1 \subset H_1 + H_2$ et donc $\dim(H_1 + H_2) \geq n - 1$ ou encore $\dim(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$. Donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = \begin{cases} (n - 1) + (n - 1) - (n - 1) = n - 1 \\ \text{ou} \\ (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2 \end{cases}.$$

Maintenant, si $\dim(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$, alors $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ et donc en particulier, $H_1 = H_2$. Réciproquement, si $H_1 = H_2$ alors $H_1 + H_2 = H_1$ et $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$.

En résumé, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ et bien sûr, si $H_1 = H_2$, alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$.

Si $n = 2$, les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul.

Si $n = 3$, les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

Exercice n° 3

On a

$$n = \dim E = \dim(\text{Ker } f + \text{Ker } g) = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g),$$

mais aussi,

$$n = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Im } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = n - \dim(\text{Ker } f) + n - \dim(\text{Ker } g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g).$$

Par suite,

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g) = n + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = n - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

et donc $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) + \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$ ou encore $\dim(\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$, et finalement, $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$, ce qui montre que les sommes proposées sont directes.

Exercice n° 4

1) Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même.

Soient alors $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E .

2) Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant.

Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels $0, 1, 2, \dots$ (car $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant.

Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans $\text{Ker } \varphi$ et donc

$$\text{Ker } \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer $\text{Im } \varphi$, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , alors

$\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur ou égal à } n-1\end{aligned}$$

Donc, $\text{Im } (\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

Exercice n° 5

Soit $u = (x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ y = t \end{cases}.$$

Donc, $\text{Ker } f = \{(0, y, 0, y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 0, 1)) = \text{Vect}(e_2 + e_4)$. En particulier, $\text{Ker } f$ est de dimension 1. Le théorème du rang permet d'affirmer que $\dim(\text{Im}(f)) = 4 - \dim(\text{Ker } f) = 3$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\text{Im } f &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(2e_1 + e_3, -(e_2 - e_4), e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(2(2e_1 + e_3) - (e_1 + 2e_3), e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(3e_1, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(e_1, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(e_1, e_1 + 2e_3 - e_1, e_2 - e_4) = \text{Vect}(e_1, 2e_3, e_2 - e_4) \\ &= \text{Vect}(e_1, e_3, e_2 - e_4).\end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(e_1, e_3, e_2 - e_4)$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

D'autre part, $\text{card}(e_1, e_3, e_2 - e_4) = 3 = \dim(\text{Im}f) < +\infty$. On en déduit que la famille $(e_1, e_3, e_2 - e_4)$ est une base de $\text{Im}f$.

On peut aussi déterminer directement $\text{Im}f$ de la façon suivante : soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' \in \text{Im}f \Leftrightarrow \exists(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \exists(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y' + t' = 0.$$

(si $y' + t' \neq 0$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t , n'a pas de solution et si $y' + t' = 0$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$).

Donc, $\text{Im}f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3, (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}((e_1, e_2 - e_4, e_3))$.

Exercice n° 6

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\bar{z}) + \mu(z' + a\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc \mathbb{R} -linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Donc, $if(a) - f(ia) = 2i|a|^2$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas \mathbb{C} -linéaire.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker}f \Leftrightarrow z + a\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ , $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\text{Ker}f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{Im}f = \mathbb{C}$.

2ème cas. Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\text{Ker}f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, $\text{Im}f$ est une droite vectorielle et pour déterminer $\text{Im}f$, il suffit d'en fournir un vecteur non nul. Donc, si $a \neq -1$, $\text{Im}f = \text{Vect}(f(1)) = \text{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ et $\text{Im}f = i\mathbb{R}$.

Exercice n° 7

1) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f((x, y)) = (x', y')$.

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{cases}.$$

2) Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = \left(\alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \gamma \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + i\left(\beta \frac{z + \bar{z}}{2} + \delta \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}\right)\bar{z} = az + b\bar{z} \end{aligned}$$

où $a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}$ et $b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}$.

3) Réciproquement, si $z' = az + b\bar{z}$, en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ où $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\begin{cases} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{cases} .$$

Ceci montre que l'application de \mathbb{R}^2 dans lui-même d'expression complexe $z' = az + b\bar{z}$ est \mathbb{R} -linéaire.

Exercice n° 8

Par définition, $\text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \dim(\text{Im}(\mathbf{u} + \mathbf{v}))$.

Mais, $\text{Im}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \{\mathbf{u}(x) + \mathbf{v}(x), x \in E\} \subset \{\mathbf{u}(x) + \mathbf{v}(x'), (x, x') \in E^2\} = \text{Im } \mathbf{u} + \text{Im } \mathbf{v}$. Donc,

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \dim(\text{Im } \mathbf{u} + \text{Im } \mathbf{v}) = \dim(\text{Im } \mathbf{u}) + \dim(\text{Im } \mathbf{v}) - \dim(\text{Im } \mathbf{u} \cap \text{Im } \mathbf{v}) \leq \dim(\text{Im } \mathbf{u}) + \dim(\text{Im } \mathbf{v}) \\ &= \text{rg } \mathbf{u} + \text{rg } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

On a montré que :

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{rg } \mathbf{u} + \text{rg } \mathbf{v}.$$

Ensuite,

$$\text{rg } \mathbf{u} = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{v}) \leq \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \text{rg}(-\mathbf{v}) = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \text{rg } \mathbf{v},$$

(puisque $\text{Im}(-\mathbf{v}) = \text{Im } \mathbf{v}$) et donc $\text{rg } \mathbf{u} - \text{rg } \mathbf{v} = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$. En échangeant les rôles de \mathbf{u} et \mathbf{v} , on a aussi $\text{rg } \mathbf{v} - \text{rg } \mathbf{u} = \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ et finalement

$$\forall(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (\mathcal{L}(E, F))^2, |\text{rg } \mathbf{u} - \text{rg } \mathbf{v}| \leq \text{rg}(\mathbf{u} + \mathbf{v}).$$

Exercice n° 9

1) Posons $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$ puis $r = \dim F$. D'après le théorème du rang,

$$r = \dim(\text{Im } f) = n - \dim(\text{Ker } f) = n - r,$$

et donc $n = 2r$. Donc, n est pair et $r = \frac{n}{2}$.

Soit G un supplémentaire de F dans E ($\dim G = n - r = r$). Soit $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ une base de G . Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on pose $\mathbf{u}_i = f(\mathbf{v}_i)$. Montrons que la famille $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{u}_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{v}_i \in \text{Ker } f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_i = 0,$$

car $(\mathbf{v}_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une famille libre. Ainsi, $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ est une famille libre de $\text{Im } f = F$ de cardinal r et donc une base de $F = \text{Ker } f = \text{Im } f$.

Puisque $E = F \oplus G$, $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ est une base de E . Puisque $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ sont dans $\text{Im } f = \text{Ker } f$, $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f(\mathbf{u}_i) = 0$. D'autre part, par construction, $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$.

2) (1) \Rightarrow (2). Si $\text{Ker } f = \text{Im } f$, alors pour tout élément x de E , $f(x)$ est dans $\text{Im } f = \text{Ker } f$ et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg } f = 2r$ ce qui montre que n est nécessairement pair et que $\text{rg } f = \frac{n}{2}$.

(2) \Rightarrow (1). Si $f^2 = 0$, alors pour tout élément x de E , $f(f(x)) = 0$ ou encore pour tout élément x de E , $f(x)$ est dans $\text{Ker } f$. Ceci montre que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. De plus, d'après le théorème du rang

$$\dim(\text{Ker } f) = n - r = 2r - r = r = \dim(\text{Im } f) < +\infty.$$

Par suite, $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

(1) \Rightarrow (3). Supposons $\text{Ker } f = \text{Im } f$. D'après ce qui précède, $f^2 = 0$. D'après 1), il existe une base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ de E telle que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, f(\mathbf{u}_i) = 0$ et $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$.

Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, g(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ et $g(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$ (g est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $\llbracket 1, r \rrbracket$, on a alors :

$$(f \circ g + g \circ f)(\mathbf{u}_i) = f(\mathbf{v}_i) + g(0) = \mathbf{u}_i + 0 = \mathbf{u}_i,$$

et

$$(f \circ g + g \circ f)(v_i) = f(u_i) + g(u_i) = 0 + v_i = v_i.$$

Les endomorphismes $f \circ g + g \circ f$ et Id_E coïncident sur une base de E , et donc $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$.

(3) \Rightarrow (1). Supposons que $f^2 = 0$ et qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$. Comme $f^2 = 0$, on a déjà $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. D'autre part, si x est un élément de $\text{Ker } f$, alors $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im } f$ et on a aussi $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$. Finalement, $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

Exercice n° 10

1) Soient k un entier naturel et x un élément de E .

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0) \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1}$. Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E/x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E/x = f^k(z) \Rightarrow x \in I_k.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N}, I_{k+1} \subset I_k$.

2) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k = N_{k+1}$. On a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.

Soit x un élément de E .

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

3) a) On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \dots$. Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors,

$$0 = \dim N_0 < \dim N_1 < \dim N_2 \dots$$

Donc $\dim N_1 \geq 1$, $\dim N_2 \geq 2$ et par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, \dim N_k \geq k$. En particulier, $\dim N_{n+1} \geq n+1 > n = \dim E$, ce qui est impossible. Donc, il existe k entier naturel tel que $N_k = N_{k+1}$.

Ainsi, $\{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$, K est une partie non vide de \mathbb{N} . $\{k \in \mathbb{N} / N_k = N_{k+1}\}$ admet donc un plus petit élément. Soit donc p le plus petit des entiers k tels que $N_k = N_{k+1}$.

Par définition de p (et même si $p = 0$), pour $k < p$, $N_k \subsetneq N_{k+1}$. D'autre part, d'après 2) et puisque $N_p = N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour $k \geq p$, on a $N_k = N_p$.

b) Si $p = 0$ (ou encore si f est injectif), on a $p \leq n$. Sinon

$$0 < \dim N_1 < \dots < \dim N_p$$

et donc, par récurrence, pour $k \leq p$, on a $\dim N_k \geq k$. En particulier

$$p \leq \dim N_p \leq n.$$

4) Puisque $N_k \subset N_{k+1}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et que $\dim E < +\infty$, on a :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1} \Leftrightarrow n - \text{rg}(f^k) = n - \text{rg}(f^{k+1}) \Leftrightarrow \dim(I_k) = \dim(I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Donc, pour $k < p$, $I_k \supsetneq I_{k+1}$ et pour $k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$.

5) Soient k un entier naturel puis g_k la restriction de f à I_k . D'après le théorème du rang,

$$d_k = \dim(I_k) = \dim(\text{Ker } g_k) + \dim(\text{Im } g_k).$$

Maintenant, $\text{Im}(g_k) = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\dim(\text{Im}(g_k)) = d_{k+1}$. D'autre part, $\text{Ker } g_k = \text{Ker } f|_{I_k} = \text{Ker } f \cap I_k$. Ainsi, pour tout entier naturel k ,

$$d_k - d_{k+1} = \dim(\text{Ker } f \cap I_k).$$

Puisque la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\dim(\text{Ker } f \cap I_k))_{k \in \mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice n° 11

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de u .

Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leq k \leq p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas.

Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x_0 tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ (et en particulier $x_0 \neq 0$).

Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons par l'absurde qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \min \{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 &\Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0 \Rightarrow u^{p-1-i} \left(\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^k(x) \right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad (\text{car pour } k \geq i+1, p-1-i+k \geq p \text{ et donc } u^{p-1-i+k} = 0) \\ &\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x) \neq 0) \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i . Donc tous les coefficients λ_k sont nuls et on a montré que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

2) Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leq n$. Par suite,

$$u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0.$$

3) On applique le n° 10. Puisque $u^{n-1} \neq 0$, on a $N_{n-1} \subsetneq N_n$.

Par suite (d'après le n° 10, 3a)), les inclusions $N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n = E$ sont toutes strictes et donc

$$0 < \dim N_1 < \dim N_2 < \dots < \dim N_n = n.$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons d_k est la dimension de N_k . Par récurrence, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $d_k \geq k$.

Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $d_i = \dim N_i > i$, alors, par récurrence, pour $i \leq k \leq n$, on a $d_k > k$ et en particulier $d_n > n$ ce qui n'est pas. Donc,

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim(N_k) = k.$$

D'après le théorème du rang, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{rg}(u^k) = n - k$, et en particulier $\text{rg}(u) = n - 1$.

Exercice n° 12

Montrons que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 3\text{Id}) = \{0\}$. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 3\text{Id}) &\Rightarrow f(x) = 2x \text{ et } f(x) = 3x \Rightarrow 3x - 2x = f(x) - f(x) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(f - 2\text{Id}) \cap \text{Ker}(f - 3\text{Id}) = \{0\}$ (même si $f^2 - 5f + 6\text{Id} \neq 0$).

Montrons que $E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) + \text{Ker}(f - 3\text{Id})$. Soit $x \in E$. On cherche y et z tels que $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$, $z \in \text{Ker}(f - 3\text{Id})$ et $x = y + z$.

Si y et z existent, nécessairement y et z sont solution du système $\begin{cases} y + z = x \\ 2y + 3z = f(x) \end{cases}$ et donc $\begin{cases} y = 3x - f(x) \\ z = f(x) - 2x \end{cases}$.

Réciproquement. Soient $x \in E$ puis $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$. On a bien $y + z = x$ puis

$$\begin{aligned} f(y) &= 3f(x) - f^2(x) = 3f(x) - (5f(x) - 6x) \quad (\text{car } f^2 = 5f - 6\text{Id}) \\ &= 6x - 2f(x) = 2(3x - f(x)) = 2y \end{aligned}$$

et donc $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. De même,

$$f(z) = f^2(x) - 2f(x) = (5f(x) - 6x) - 2f(x) = 3(f(x) - 2x) = 3z,$$

et donc $z \in \text{Ker}(f - 3\text{Id})$. On a montré que $E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) + \text{Ker}(f - 3\text{Id})$ et finalement que

$$E = \text{Ker}(f - 2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 3d).$$

Exercice n° 13

On sait déjà que F est un sous-espace vectoriel de E (voir exercice n° 19, planche n° 28). Soit $\varphi : F \rightarrow \mathbb{C}^2$.

$$u \mapsto (u_0, u_1)$$

- φ est bien une application de F dans \mathbb{C}^2 .
- Soient $(u, v) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1) = \lambda(u_0, u_1) + \mu(v_0, v_1) \\ &= \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v). \end{aligned}$$

φ est une application linéaire de F dans \mathbb{C}^2 .

- Soit $u \in \text{Ker}\varphi$. Alors $u_0 = u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n$ (puisque $a \neq 0$). Mais alors, par récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ ou encore $u = 0$. Ainsi, $\text{Ker}\varphi$ est le sous-espace nul et donc φ est injectif.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Soit u la suite définie par $u_0 = a, u_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. u est un élément de F tel que $\varphi(u) = (a, b)$. Ceci montre que φ est surjectif.

Finalement, φ est un isomorphisme de F sur \mathbb{C}^2 . En particulier, $\dim F = \dim(\mathbb{C}^2) = 2$.

On a montré que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Exercice n° 14

On a déjà montré que la famille $(1, z)$ est une famille libre du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} (voir exercice n° 23, planche 28). De plus, $\text{card}(1, z) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) < +\infty$. Donc $(1, z)$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Exercice n° 15

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) \leq n$. Donc chaque $P_k, 0 \leq k \leq n$, est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus,

$$\text{card}(P_k)_{0 \leq k \leq n} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X] < +\infty.$$

Pour montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de vérifier que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$. Supposons par l'absurde que l'un au moins des λ_k ne soit pas nul.

Soit $p = \text{Max}\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$ ($\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$ est une partie non vide et majorée (par n) de \mathbb{N} et donc $\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket / \lambda_k \neq 0\}$ admet un plus grand élément). Par définition de p ,

$$\sum_{k=0}^p \lambda_k P_k = 0.$$

Cette dernière égalité est impossible car $\sum_{k=0}^p \lambda_k P_k$ est un polynôme de degré p (puisque $\lambda_p \neq 0$) et donc $\sum_{k=0}^p \lambda_k P_k$ n'est pas le polynôme nul. Donc

$$\forall (\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0 \right),$$

et la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.

On a montré que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice n° 16

Soit $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E . Par hypothèse, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists p_k \in \mathbb{N}^* / f^{p_k}(e_k) = 0$. Soit $p = \text{Max}\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. p est un entier naturel non nul et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p - p_k \geq 0$. On a donc

$$f^p(e_k) = f^{p-p_k}(f^{p_k}(e_k)) = f^{p-p_k}(0) = 0.$$

L'endomorphisme f^p s'annule en chacun des vecteurs d'une base de E et donc $f^p = 0$. On a montré que f est nilpotent.

Exercice n° 17

1) Si $E = \{0\}$, alors $f = 0$ et en particulier f est une homothétie. Dorénavant, on supposera que $E \neq \{0\}$. Soit x_0 un élément non nul de E . Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = \lambda x_0$. Vérifions alors que pour tout x de E , $f(x) = \lambda x$. Soit donc x un élément de E .

1er cas. Supposons la famille (x, x_0) libre.

Il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$ et il existe $\lambda_{x+x_0} \in \mathbb{K}$ tel que $f(x+x_0) = \lambda_{x+x_0}(x+x_0) = \lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0$. Puisque f est linéaire,

$$\lambda_{x+x_0}x + \lambda_{x+x_0}x_0 = f(x+x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda x_0.$$

Puisque la famille (x, x_0) est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient $\lambda_x = \lambda_{x+x_0} = \lambda$. Par suite, $f(x) = \lambda x$.

2ème cas. Supposons la famille (x, x_0) liée. Puisque x_0 n'est pas nul, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu x_0$. Mais alors

$$f(x) = f(\mu x_0) = \mu f(x_0) = \mu \lambda x_0 = \lambda \mu x_0 = \lambda x.$$

Ainsi, on a trouvé $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout x de E , $f(x) = \lambda x$ ou encore on a trouvé $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Id}$. On a montré que f est une homothétie.

2) Soit f un endomorphisme de E tel que $\forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f$. Vérifions que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K} / f(x) = \lambda_x x$ ou encore vérifions que $\forall x \in E, f(x) \in \text{Vect}(x)$. C'est immédiat si $x = 0$.

Soit x un élément non nul de E . Soit D la droite vectorielle engendrée par x , soit H un supplémentaire de D dans E puis s la symétrie par rapport à D parallèlement à H .

$$s \circ f = f \circ s \Rightarrow s(f(x)) = f(s(x)) \Rightarrow s(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(x) \in D \Rightarrow f(x) \in \text{Vect}(x).$$

Ainsi, $\forall x \in E, f(x) \in \text{Vect}(x)$. D'après 1), f est nécessairement une homothétie.

Réciproquement, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ puis $f = \lambda \text{Id}$. Pour tout $g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = \lambda \text{Id} \circ g = \lambda g, g \circ f = g \circ \lambda \text{Id} = \lambda g \circ \text{Id} = \lambda g$ et donc $f \circ g = g \circ f$.

On a montré que les endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes sont les homothéties vectorielles.